数値解析　第10回レポート課題

担当教員：劉雪峰

1　Lagrange 補間関数の基底

異なる節点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ に対して、関数 $L_i(x)$ は以下の性質を持っています。

- $L_i(x)$ は x の $(n-1)$ 次多項式です。
- $L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \cdots, n)$

では、以下の具体的な節点に対して、$L_i(x)$ を求めて、グラフを描いてください。

1) $n = 3,\ x_i = (i-1)/2 \qquad (i = 1, \cdots, n)$
2) $n = 4,\ x_i = (i-1)/3 \qquad (i = 1, \cdots, n)$
3) $n = 11,\ x_i = (i-1)/10 \qquad (i = 1, \cdots, n)$
4) $n = 3,\ x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \qquad (i = 1, \cdots, n)$
5) $n = 4,\ x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \qquad (i = 1, \cdots, n)$
6) $n = 11,\ x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \qquad (i = 1, \cdots, n)$

2　関数 f の補間関数

与えられる関数 f の節点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ における $(n-1)$ 次 Lagrange 補間関数 $p(x)$ は以下の条件を満たす $(n-1)$ 次多項式です。

$$p(x_i) = f(x_i), \quad (i = 1, \cdots n)$$

区間 $[a, b] = [-1, 1]$ の上に次の f を定義する。

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

以下の二つの節点における補間関数 $p(x)$ を求めて、関数 $f(x)$ と $p(x)$ の図を描画しなさい。

1) $x_i = -1 + 0.2\, i \qquad (i = 0, 1, \cdots, 10)$
2) $n = 11,\ x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \qquad (i = 1, \cdots, n)$

等分割の場合、多項式の次数が大きくなる伴に、補間関数の誤差も大きくなるという特徴があり、ルング現象と呼ぶ。ルング現象の詳細は次のウェブページを参照しなさい。

`https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AB%E3%83%B3%E3%82%B2%E7%8F%BE%E8%B1%A1`

3　補足：f のグラフの描画方法

節点 $x_i = -1 + i * 0.01$ $(i = 0, \cdots, 200)$ に対して $f(x_i)$ を計算し、$(x_i, f(x_i))$ を繋がっている折れ線を書くことで、関数の滑らかな曲線を描画できる。Octave を使う場合、以下の命令で折れ線を描画できる。計算式の中の「$.*$」と「$*$」の違いを注意してください。

```
x=-1:0.01:1; y=1./(1 + 25 * x .* x); plot(x,y,'-');
```