

プログラミング演習:レポート課題

担当教員：劉雪峰

2021 年 5 月 6 日

1 ニュートン法

平方根の逆の計算

コンピュータグラフィックの分野（3D ゲームの開発などに関わる）では、照光処理を計算するために、 $1/\sqrt{x}$ の計算はよく使用されている。平方根の逆はニュートン法を使って高速に計算できる。例えば、 $x = a$ について、 $1/\sqrt{a}$ は $f(t) = a - 1/t^2 = 0$ の根となる。これに関する面白い話は次のページを参照しなさい。

<http://www.beyond3d.com/content/articles/8/>

以下、 $a = 10$ の場合、 a の平方根の逆の計算を考えてください。

- 1) $f(t) = a - 1/t^2 = 0$ ($a = 10$) とする。以下の関数 $g(t)$ は $[0.2, 0.4]$ における縮小写像であることを証明しなさい。

$$g(t) := t - \frac{f(t)}{f'(t)}$$

- 2) ニュートン法を用いて $f(t) = a - 1/t^2 = 0$ ($a = 10$) の根を計算せよ。反復計算の初期値と停止条件は以下のようにする。

- 初期値： $p_0 = 0.2$
- 停止条件： $|p_{n+1} - p_n| < 10^{-10}$ または反復回数 $N > 20$

- 3) 計算結果 $\{p_i\}_{i=1}$ の収束オーダーを確認せよ。

■[補足：収束オーダーの計算方法] p を $f(x) = 0$ の解または精度の良い近似解とする。反復回数 n が十分大きい時、反復計算で得られる数列 $\{p_i\}$ は以下の式を満たす。

$$\frac{|p_n - p|}{|p_{n-1} - p|^\alpha} \approx \frac{|p_{n-1} - p|}{|p_{n-2} - p|^\alpha} \approx \lambda$$

よって、 $n \geq 2$ のとき、次の式で収束オーダー α を計算できる。一般的に、 n が大きい時、 α の計算結果が一定の値となる。

$$\alpha \approx \frac{\log(|p_{n-1} - p|/|p_n - p|)}{\log(|p_{n-2} - p|/|p_{n-1} - p|)}$$

■[ヒント：結果のまとめについて] 計算結果を以下の表にまとめるのはおすすめ。

表 1 計算結果

i	Newton method	Order
0	$p_0 = 0.2$	-
1	$p_1 = ?$	-
2	$p_2 = ?$	$\alpha = ?$ (p_0, p_1, p_2 から α を計算する)
3	$p_3 = ?$	$\alpha = ?$ (p_1, p_2, p_3 から α を計算する)
\vdots	\vdots	\vdots