数値解析 A,B：第 8 回レポート課題

担当教員：劉雪峰

定義：行列 A の $\|\cdot\|_p$ ノルムは以下のように定義される。

$$\|A\|_p := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad (1 \le p \le \infty)\,.$$

1　行列の $\|\cdot\|_\infty$ ノルム

行列の $\|\cdot\|_\infty$ ノルムに関する以下の性質を証明しなさい。

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_j |a_{ij}|$$

[ヒント：以下のことを示すればよいです。]

- (1) 任意の x について、
$$\|Ax\|_\infty \le \max_{1\le i\le n} \sum_j |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty\,.$$
- (2) $\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0,j}|$ とすると、以下の等式を満たす x が存在すること。

$$\|Ax\|_\infty \ge \sum_j |a_{i_0,j}| \cdot \|x\|_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty\,.$$

2　行列の $\|\cdot\|_2$ ノルム

1) $n\times n$ 実対称行列 A の固有値を $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\cdots,\,\lambda_n$ とする。このとき、以下の式が成り立つすることを証明しなさい。
$$\|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$$
「ヒント：行列 A の正規直交固有ベクトル $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ によるベクトル x を表示ができます。」
$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i, \quad (\text{固有ベクトルの性質：} \quad \phi_i^T\phi_j = \delta_{ij}, \quad A\phi_i = \lambda_i\phi_i)\,.$$

2) [オプション] 一般的な $n\times n$ 行列 A について、A^TA の固有値を $\rho_1,\,\rho_2,\,\cdots,\,\rho_n$ とする。このとき、以下の式が成り立つすることを証明しなさい。
$$\|A\|_2 = \max_{1\le i\le n} \sqrt{\rho_i}$$

3　反復法によって、連立一次方程式を解く

以下の連立一次方程式について、Jacobi 法、Gauss-Seidel 法,　SOR 法 ($w = 0.5, 1.2, 1.7$) を使って解いてください。厳密解を x^* として、残差 $||\widetilde{x}_k - x^*||_2 \leq 10^{-5}$ まで反復計算しなさい。

また、計算回数と残差の log 値 ($\log(||\widetilde{x}_k - x^*||_2)$) の関係図を描いてください。

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

参考：プログラミング演習の第 8 回の資料を参考してください。https://www.ces-alpha.org/hp/NAP2020/