関数の積分

アクティブラーニング　2021年７月８日　担当教員：劉　雪峰

1) 関数の離散的な値を利用して関数の性質を検討する。

予備知識：MATLAB(Octave)による数値計算法

- a から b まで0.1の間隔で数列を作成します。transposeという命令を使用して、「数列」または「行列」の転置を取ることができます。

```
x_list = a:0.1:b
transpose(x_list)
```

- sum(y_list) : 与えられる数列の和を計算します。

```
y_list=[
1
2
3]
sum(y_list)
```

- 各行の計算結果を表示しないようにする場合、命令の後に「;」を付けてください。

演習1：以下のコードを実行して、MATLAB/Octaveの命令を練習してください。

In [34]:

```
#演習1：以下のコードを実行して、MATLAB/Octaveの命令を練習してください。

x_list = 0:0.1:1
transpose(x_list) % x_listの転置;
sum(x_list)
```

```
x_list =

 Columns 1 through 7:

    0.00000    0.10000    0.20000    0.30000    0.40000    0.50000    0.60000

 Columns 8 through 11:

    0.70000    0.80000    0.90000    1.00000

ans =

   0.00000
   0.10000
   0.20000
   0.30000
   0.40000
   0.50000
   0.60000
   0.70000
   0.80000
   0.90000
   1.00000

ans =  5.5000
```

演習２：グラフの作成

以下の命令では、x_list, y_listがなす点のリストを描画します。３番目の引数（'r-o'）はグラフのスタイルを指定します。

```
plot(x_list, y_list, 'r-o')
plot(x_list, y_list, 'b.-d')
```

スタイルの指定方法：

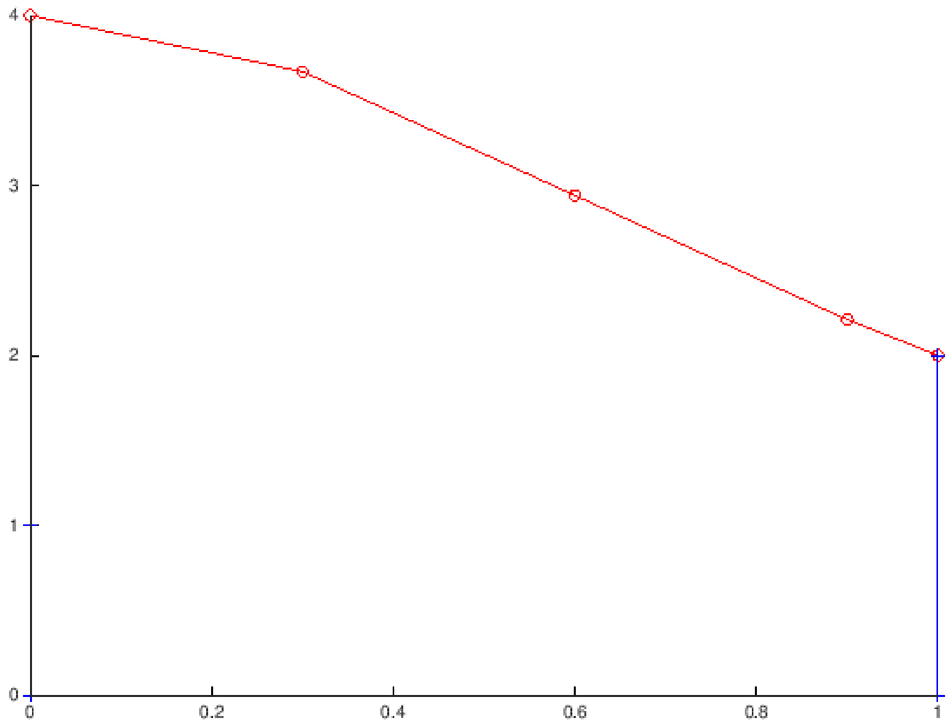
- 色の設定 : "r":赤, "g"：緑,"b"：青
- 線分種類の指定："-"：折れ線、"."：点のみ、"-."：破線
- マーカーの指定："o"(ゼロではない):丸, "+"：クロス, "d"：ダイアモンド

補足：

- `hold on` を使用することで、グラフを重ねて描画することができます。
- `hold off` を使用する場合、最後のグラフのみが描画されます。

In [18]:

```
#演習２：グラフの作成

x_list =[
0.00000
0.30000
0.60000
0.90000
1.00000
];

y_list =[
4.000000000000000
3.669724770642202
2.941176470588236
2.209944751381216
2.000000000000000
];

hold on

plot(x_list, y_list, 'r-o')
plot([0,0],[0,1],'b-+')
plot([1,1],[0,2],'b-+')
```



グループ検討課題 1 ：

xのリストを作成して、http://www.xfliu.org/AL2021/ のサイトでyのリストを計算して、$y=f(x)$のグラフを作成・確認してください。

グラフを利用して関数の性質を検討してください。例えば、関数の最小値、最大値、単調性、凹凸性など。

In [ ]:

グループ検討課題２：

$y=f(x)$の離散的な値を利用して、[0,1]における$y=f(x)$の積分の計算方法を考えてください。

- 厳密な積分ではなく、近似的に積分を求めること。
- 使用される点の最大数を201までとする。

In [ ]:

グループ検討課題３：

今回の検討対象である$y=f(x)$を単調減少関数と仮定します。$y=f(x)$の離散的な値を利用して、[0,1]における$y=f(x)$の積分の範囲を検討してみてください。例えば、$2<\int_0^1 f(x)dx<4$という範囲は容易に得られます。

- 使用される点の数を10までとすること。
- 積分の上界と下界の差をできる限り小さくすること。

In [ ]:

2) 多項式を利用して関数の積分を計算する。

今回の検討対象である$y=f(x)$の$[0,1]$における積分の理論値はπです。

$$\int_0^1 f(x)dx=\pi=3.1415926...$$

以下、曲線$y=f(x)$の点を利用して、少ない点を利用する精度の良い積分方法を検討します。

曲線$y=f(x)$の３点を通る２次多項式を考えます。まず、曲線の３点を(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)とします。多項式を$p(x)=a+bx+cx^2$とします。 このとき、以下のa,b,cに関する連立方程式が得られます。

$$\begin{aligned} a+bx_1+cx_1^2&=y_1\\ a+bx_2+cx_2^2&=y_2\\ a+bx_3+cx_3^2&=y_3 \end{aligned}$$

上記の方程式を「行列」の言葉で書くと、以下の行列の方程式となります。

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

この方程式は手計算でも解けますが、今回のMATLABの命令で解を計算します。演習３の行列の各行の作成方法に注意してください。

MATLAB（Octave）の命令の説明

- `inv(A)`：行列Aの逆行列を求める。
- `x=inv(A)*y`：$x=A^{-1}y$が $Ax=y$の解を与える。

- `x=A\b` ： `x=inv(A)*y` とは同じ結果を算出する。
- `x_list(k)` ：数列 `x_list` の第k成分を取る。
- `x_list.^2`：数列 `x_list` の二乗を取る。「.」の使用を注意してください。

演習3： 3点を通る多項式を求める。

In [37]:

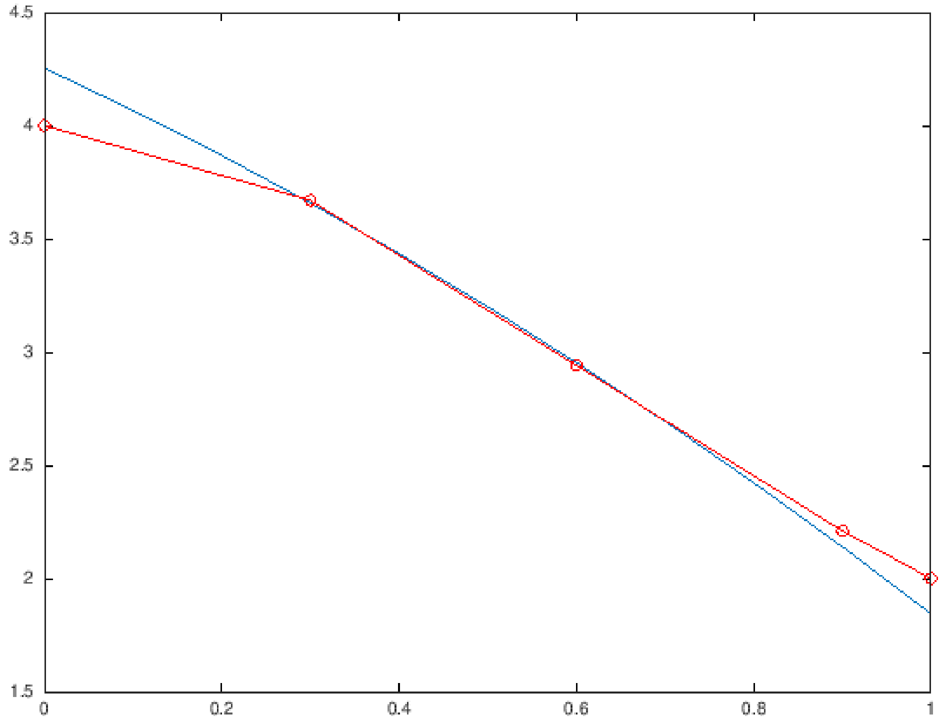
```
x1 = 0.25;
x2 = 0.5;
x3 = 0.75;
y1=3.764705882352941;
y2=3.200000000000000;
y3=2.560000000000000;

A=[
1,   x1,   x1^2;
1,   x2,   x2^2;
1,   x3,   x3^2
]

y = [
y1;
y2;
y3;
]

abc = inv(A)*y  % または、 abc = A¥b
a = abc(1)
b = abc(2)
c = abc(3)
```

```
A =

   1.000000   0.250000   0.062500
   1.000000   0.500000   0.250000
   1.000000   0.750000   0.562500

y =

   3.7647
   3.2000
   2.5600

abc =

   4.25412
  -1.80706
  -0.60235

a =  4.2541
b = -1.8071
c = -0.60235
```

In [38]:

```
%(演習３の続き)

%多項式のグラフを作成します。

x_list = 0:0.1:1;
y_list = a + b*x_list + c*x_list.^2;
plot(x_list, y_list)

%y=f(x)のグラフを描画します。
x_list =[
0.00000
0.30000
0.60000
0.90000
1.00000
];

y_list =[
4.000000000000000
3.669724770642202
2.941176470588236
```

```
2.209944751381216
2.000000000000000
];

hold on
plot(x_list, y_list, 'r-o')
```



グループ検討課題４：

- 演習3で得られた多項式$p(x)$の係数を利用して、[0,1]における$p(x)$の積分を計算しなさい。
- 曲線$y=f(x)$の３点の選び方を変わって、３点を通る多項式$p(x)$の$[0,1]$における積分を計算しなさい。$y=f(x)$の積分の理論値πとの差を検討しなさい。
- 曲線$y=f(x)$の４点または５点に通る多項式を計算してみてください。多項式の積分も計算しなさい。

In [ ]:

```

```

グループ検討課題 ５ ：

曲線$y=f(x)$の最大５点を利用することで、$y=f(x)$の積分の良い近似方法を検討しなさい。

- 使用方法については、自由に発想してください。
- ７月２９日の発表日に、６グループが作った積分法と積分値の精度を比較して、勝負します。
- 「最大５点を利用する」という条件が重要です。

例えばのアイデア：

- 分割の中点を使用すること。
- $[0,1]$の区間を二つに分割して、それぞれの小区間で、$y=f(x)$の点に通る多項式を利用して積分を計算すること。

より挑戦的な検討

$y=f(x)$の点を通る多項式を検討するとき、どのような点を使用すればよいですか？x座標の節点の選び方は大切です。

例えば、[-1,1]における関数の積分を考える。$x_1=0$という節点を利用する場合、$(x_1, f(x_1))$に通るすべての１次までの多項式$p(x)$について、$S=2f(x_1)$という計算式は$\int_{-1}^{1} p(x)dx$の正しい値を提供できます。よって、

$x_1 = 0$が良い節点です。

同じように、$x = x_1, x = x_2$という二つの節点を利用する場合、$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$を通るすべての３次（なぜ３次？）までの多項式$p(x)$に対して、$S = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$の計算式は$\int_{-1}^{1} p(x)dx$の正しい値を提供することが可能です。このときの$x_1, x_2, c_1, c_2$を算出すれば、３次までの多項式の積分の厳密計算ができます。高次多項式が$y = f(x)$の良い近似を提供できますので、$S = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$は$y = f(x)$の良い近似積分を提供できます。

In [ ]: