数値解析 A,B：第 6 回レポート課題

担当教員：劉雪峰

定義：行列 A の $\|\cdot\|_p$ ノルムは以下のように定義される。

$$\|A\|_p := \max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \quad (1\le p\le\infty)\,.$$

1　行列の $\|\cdot\|_\infty$ ノルム

行列の $\|\cdot\|_\infty$ ノルムに関する以下の性質を証明しなさい。

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_j |a_{ij}|$$

[ヒント：以下のことを示すればよいです。]

- (1) 任意の x について、

$$\|Ax\|_\infty \le \max_{1\le i\le n}\sum_j |a_{ij}|\cdot\|x\|_\infty\,.$$

- (2) $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ とすると、以下の等式を満たす x が存在すること。

$$\|Ax\|_\infty \ge \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|\cdot\|x\|_\infty = \|A\|_\infty\cdot\|x\|_\infty\,.$$

2　行列の $\|\cdot\|_2$ ノルム

1) $n\times n$ 実対称行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする。このとき、以下の式が成り立つすることを証明しなさい。

$$\|A\|_2 = \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

「ヒント：行列 A の正規直交固有ベクトル $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ による以下の x の表示ができます。」

$$x=\sum_{i=1}^n c_i\phi_i,\quad Ax=\sum_{i=1}^n c_iA\phi_i=\sum_{i=1}^n c_i\lambda_i\phi_i$$

固有ベクトルの性質：

$$\phi_i^T \phi_j = \delta_{ij}, \quad A\phi_i = \lambda_i \phi_i \,.$$

2) [オプション] 一般的な $n \times n$ 行列 A について、$A^T A$ の固有値を ρ_1, ρ_2, $\cdots$, ρ_n とする。このとき、以下の式が成り立つすることを証明しなさい。

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le i \le n} \sqrt{\rho_i}$$

3 反復法によって、連立一次方程式を解く

以下の連立一次方程式について、Jacobi 法、Gauss-Seidel 法, SOR 法 ($w = 0.5, 1.2, 1.7$) を使って解いてください。厳密解を x^*、k 回反復計算後の近似解を $\widetilde{x}_k$ として、残差 $||\widetilde{x}_k - x^*||_2 \le 10^{-5}$ まで反復計算しなさい。

1) 計算回数と残差の log 値 ($\log(||\widetilde{x}_k - x^*||_2)$) の関係図を描いてください。

2) (オプション) 反復計算法のノルムの変化に関わる $\|M^{-1}N\|$ を $\|\cdot\|_2$ または $\|\cdot\|_\infty$ ノルムで検討してみてください。

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

参考：プログラミング演習の第 8,9 回の資料を参考してください。https://www.ces-alpha.org/hp/NAP2021/